REAL ANALYSIS PYQ | JUNE 2025

338. मान लीजिए कि $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ एक फलन है जो $f(x)=\frac{3x+2}{4x+3}$ के रूप में परिभाषित है। मान लीजिए कि $x_1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$। $n\geq 1$ के लिए $x_{n+1}=f(x_n)$ परिभाषित करें। मान लीजिए कि अनुक्रम $(x_n)_{n\geq 1}$ एक वास्तविक संख्या l पर अभिसरित होता है। निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

(1) यदि l धनात्मक है, तो $l=\frac{\sqrt{3}}{2}$।

(2) यदि l धनात्मक है, तो $l=\frac{1}{\sqrt{2}}$।

(3) यदि l ऋणात्मक है, तो $l=-\frac{\sqrt{3}}{2}$।

(4) यदि l ऋणात्मक है, तो $l=-\frac{1}{2}$।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

339. मान लीजिए कि p,q ऋणेतर पूर्णांक हैं। निम्नलिखित कथनों पर विचार करें:
(A) एक पूर्णांक $k\geq 1$ इस प्रकार है कि $p+k=q$।
(B) एक पूर्णांक $k\geq 1$ इस प्रकार है कि $q+k=p$।
निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

(1) ऐसे ऋणेतर पूर्णांक p,q विद्यमान हैं कि (A) और (B) दोनों सत्य हैं।

(2) (A) और (B) दोनों असत्य हैं यदि और केवल यदि $p=q$

(3) सभी ऋणेतर पूर्णांकों p और q के लिए, (A) या (B) सत्य है

(4) ऐसा $p\neq q$ विद्यमान है कि (A) और (B) दोनों असत्य हैं

(5) अनुत्तरित प्रश्न

340. मान लीजिए कि $x\in(0,\infty)$ के लिए $f(x)=x\log_e(1+\frac{1}{x})$ है। निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

(1) f अपरिबद्ध है

(2) f वर्धमान है

(3) $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

(4) f ह्रासमान है

(5) अनुत्तरित प्रश्न

341. प्रत्येक $n\geq 1$ के लिए, मान लीजिए कि $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ निम्न प्रकार परिभाषित है

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{यदि } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 2-nx & \text{यदि } x\in(\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \\ 0 & \text{यदि } x\in(\frac{2}{n},1] \end{cases}$$

निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

(1) $(f_n)_{n\geq1}$, $[0,1]$ पर एक संतत फलन f पर एकसमान अभिसरित होता है।

(2) $(f_n)_{n\geq1}$, $[0,1]$ पर एक असंतत फलन f पर बिन्दुशः अभिसरित होता है।

(3) $(f_n)_{n\geq1}$, $[0,1]$ पर एक संतत फलन f पर बिन्दुशः अभिसरित होता है।

(4) $(f_n)_{n\geq1}$, $[0,1]$ पर बिन्दुशः अभिसरित नहीं होता है।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

REAL ANALYSIS PYQ | CODE:

338. Let $f:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ be the function defined as $f(x)=\frac{3x+2}{4x+3}$. Let $x_1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. For $n\geq 1$ define $x_{n+1}=f(x_n)$. Suppose that the sequence $(x_n)_{n\geq 1}$ converges to a real number l. Which of the following statements is true?

(1) If l is positive, then $l=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) If l is positive, then $l=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3) If l is negative, then $l=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(4) If l is negative, then $l=-\frac{1}{2}$.

(5) Question not attempted

339. Let p,q be non-negative integers. Consider the following statements:
(A) There is an integer $k\geq 1$ such that $p+k=q$.
(B) There is an integer $k\geq 1$ such that $q+k=p$.
Which of the following statements is true?

(1) There exist non-negative integers p,q such that both (A) and (B) are true.

(2) Both (A) and (B) are false if and only if $p=q$

(3) For all non-negative integers p and q, (A) or (B) is true

(4) There exists $p\neq q$ such that both (A) and (B) are false

(5) Question not attempted

340. Let $f(x)=x\log_e(1+\frac{1}{x})$ for $x\in(0,\infty)$. Which of the following statements is true?

(1) f is unbounded

(2) f is increasing

(3) $\lim_{x\to\infty}f(x)=2$

(4) f is decreasing

(5) Question not attempted

341. For each $n\geq 1$, let $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ be defined as

$$f_n(x)=\begin{cases} nx & \text{if } x\in[0,\frac{1}{n}] \\ 2-nx & \text{if } x\in(\frac{1}{n},\frac{2}{n}) \\ 0 & \text{if } x\in(\frac{2}{n},1] \end{cases}$$

Which of the following statements is true?

(1) $(f_n)_{n\geq1}$ converges uniformly on $[0,1]$ to a continuous function f.

(2) $(f_n)_{n\geq1}$ converges pointwise on $[0,1]$ to a discontinuous function f.

(3) $(f_n)_{n\geq1}$ converges pointwise on $[0,1]$ to a continuous function f.

(4) $(f_n)_{n\geq1}$ does not converge pointwise on $[0,1]$.

(5) Question not attempted

342. मान लीजिए कि A, B, $\mathbb{N}$ के अरिक्त उपसमुच्चय हैं जिनकी गणनसंख्या $|A| \geq 2$ है। मान लीजिए कि $S_1 = \{f : A \to B \mid f \text{ एकैकी है}\}$ और $S_2 = \{g : B \to A \mid g \text{ आच्छादक है}\}$। निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

(1) यदि $A \subsetneq B$ और B परिमित है, तो S_2 से S_1 में एक एकैकी प्रतिचित्रण है।

(2) यदि $B = \mathbb{N}$ है तो S_2 से B में एक एकैकी प्रतिचित्रण विद्यमान है।

(3) यदि $B = \mathbb{N}$ और A परिमित है, तो B से S_1 में एक एकैकी प्रतिचित्रण विद्यमान है।

(4) यदि A परिमित है, तो किसी भी B के लिए S_2 परिमित है।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

343. मान लीजिए कि
$A = \{\frac{p}{q} \in (0,1) : p \in \mathbb{N}, q = 2^n \text{ किसी } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ के लिए}, \gcd(p,q) = 1\}$,
$B = \{\frac{p}{q} \in (0,1) : p \in \mathbb{N}, q = 2^n 5^m \text{ किसी } n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ के लिए}, \gcd(p,q) = 1\}$
,
$C = \{\frac{p}{q} \in (0,1) : \frac{p}{q} \text{ का सांत दशमलव प्रसार है}\}$
$(0,1)$ के उपसमुच्चय हैं। निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?

(1) $A \subsetneq C$ और $B \subsetneq C$

(2) $A \subsetneq C \subsetneq B$

(3) $A \subsetneq B \subsetneq C$

(4) $A \subsetneq B = C$

(5) अनुत्तरित प्रश्न

344. मान लीजिए कि f और g, $[a, b]$ पर वास्तविक-मान वाले रीमान समाकलनीय फलन हैं इस प्रकार कि $g([a, b]) \subseteq [a, b]$ है। निम्न में से कौन से कथन अनिवार्यतः सत्य हैं?

(1) संयोजन $f \circ g$ रीमान समाकलनीय है।

(2) यदि प्रत्येक $x \in [a, b]$ के लिए $g(x) \neq 0$ है, तो $\frac{f}{g}$ रीमान समाकलनीय है।

(3) धनात्मक वर्गमूल $\sqrt{f^2 + g^2}$ रीमान समाकलनीय है।

(4) संयोजन $f \circ g$ रीमान समाकलनीय है, यदि f और g दोनों संतत हैं।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

345. मान लीजिए कि $C[0, 1]$ मानक $|f| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ से सुसज्जित वास्तविक मान वाले संतत फलनों की $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि है। मान लीजिए कि $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$, $x \in [0, 1]$ के लिए $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ के रूप में परिभाषित है। मान लीजिए कि $T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T$ (n बार)। निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

(1) ऐसा $\alpha \in (0, 1)$ विद्यमान है कि सभी $f, g \in C[0, 1]$ के लिए, $|T(f) - T(g)| \leq \alpha |f - g|$।

(2) ऐसा $\alpha \in (0, 1)$ विद्यमान है कि सभी $f, g \in C[0, 1]$ के लिए, $|T^2(f) - T^2(g)| \leq \alpha |f - g|$।

(3) समुच्चय $\{f \in C[0, 1] : T(f) = f\}$ एक एकल समुच्चय है।

(4) $|T^n| \to \infty$ जब $n \to \infty$।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

346. मान लीजिए कि f, $(0, \infty)$ पर एक परिबद्ध, दो बार संतत अवकलनीय वास्तविक मान वाला फलन है इस प्रकार कि सभी $x \in (0, \infty)$ के लिए $f''(x) \geq 0$ है। निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

(1) सभी $x > 0$ के लिए $f'(x) \leq 0$

(2) $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$

(3) $\lim_{x \to \infty} x f'(x)$ का विद्यमान होना आवश्यक नहीं है।

(4) $\lim_{x \to \infty} x f'(x) = 0$

(5) अनुत्तरित प्रश्न

342. Let A, B be non-empty subsets of $\mathbb{N}$ with cardinality $|A| \geq 2$. Let $S_1 = \{f : A \to B \mid f \text{ is one-to-one}\}$ and $S_2 = \{g : B \to A \mid g \text{ is onto}\}$. Which of the following statements is true?

(1) If $A \subsetneq B$ and B is finite, then there is a one-to-one map from S_2 to S_1.

(2) If $B = \mathbb{N}$ then there exists a one-to-one map from S_2 to B.

(3) If $B = \mathbb{N}$ and A is finite, then there exists a one-to-one map from B to S_1.

(4) If A is finite, then S_2 is finite for any B.

(5) Question not attempted

343. Let
$A = \{\frac{p}{q} \in (0,1) : p \in \mathbb{N}, q = 2^n \text{ for some } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \gcd(p,q) = 1\}$,
$B = \{\frac{p}{q} \in (0,1) : p \in \mathbb{N}, q = 2^n 5^m \text{ for some } n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \gcd(p,q) = 1\}$
,
$C = \{\frac{p}{q} \in (0,1) : \frac{p}{q} \text{ has terminating decimal expansion}\}$
be subsets of $(0, 1)$. Which of the following statements is true?

(1) $A \subsetneq C$ and $B \subsetneq C$

(2) $A \subsetneq C \subsetneq B$

(3) $A \subsetneq B \subsetneq C$

(4) $A \subsetneq B = C$

(5) Question not attempted

344. Let f and g be real-valued Riemann integrable functions on $[a, b]$ such that $g([a, b]) \subseteq [a, b]$. Which of the following statements are necessarily true?

(1) The composition $f \circ g$ is Riemann integrable.

(2) If $g(x) \neq 0$ for each $x \in [a, b]$, then $\frac{f}{g}$ is Riemann integrable.

(3) The positive square root $\sqrt{f^2 + g^2}$ is Riemann integrable.

(4) The composition $f \circ g$ is Riemann integrable, if both f and g are continuous.

(5) Question not attempted

345. Let $C[0, 1]$ be the $\mathbb{R}$-vector space of real valued continuous functions equipped with the norm $|f| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Let $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ be defined as $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$, for $x \in [0, 1]$. Let $T^n = T \circ T \circ \ldots \circ T$ (n times). Which of the following statements are true?

(1) There exists $\alpha \in (0, 1)$ such that for all $f, g \in C[0, 1], |T(f) - T(g)| \leq \alpha |f - g|$.

(2) There exists $\alpha \in (0, 1)$ such that for all $f, g \in C[0, 1], |T^2(f) - T^2(g)| \leq \alpha |f - g|$.

(3) The set $\{f \in C[0, 1] : T(f) = f\}$ is a singleton set.

(4) $|T^n| \to \infty$ as $n \to \infty$.

(5) Question not attempted

346. Let f be a bounded, twice continuously differentiable real-valued function on $(0, \infty)$ such that $f''(x) \geq 0$ for all $x \in (0, \infty)$. Which of the following statements are true?

(1) $f'(x) \leq 0$ for all $x > 0$

(2) $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$

(3) $\lim_{x \to \infty} x f'(x)$ need not exist.

(4) $\lim_{x \to \infty} x f'(x) = 0$

(5) Question not attempted

[P.T.O. / कृपया पन्ना उलटिए]

347. अनुक्रम $(s_n)_{n\geq 1}$ और $(t_n)_{n\geq 1}$ पर विचार करें जो $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}$ तथा $t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n)^k}$ द्वारा परिभाषित हैं। निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

(1) $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n$

(2) $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e$

(3) $\liminf_{n\to\infty} s_n \geq e^2$

(4) $\liminf_{n\to\infty} t_n \geq e$

(5) अनुत्तरित प्रश्न

348. मान लीजिए कि μ, $\mathbb{R}$ पर लेबेग माप को निरूपित करता है। मान लीजिए कि f, $\mathbb{R}$ पर एक ऋणेतर लेबेग मेय फलन है। मान लीजिए कि $0=a_{0}

(1) यदि f, $\mathbb{R}$ पर लेबेग समाकलनीय है, तो $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ परिमित है।

(2) यदि $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ परिमित है, तो f, $\mathbb{R}$ पर लेबेग समाकलनीय है।

(3) यदि $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ परिमित है और सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) \geq \alpha$ है, तो f, $\mathbb{R}$ पर लेबेग समाकलनीय है।

(4) यदि $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ परिमित है और f परिबद्ध है, तो f, $\mathbb{R}$ पर लेबेग समाकलनीय है।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

349. मान लीजिए कि $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक अचर-रहित बहुपद है। निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

(1) p के अंतर्गत एक संहत समुच्चय का पूर्व-प्रतिबिम्ब एक संहत समुच्चय होता है।

(2) p के अंतर्गत एक संबद्ध समुच्चय का पूर्व-प्रतिबिम्ब एक संबद्ध समुच्चय होता है।

(3) प्रत्येक बिन्दु $x \in \mathbb{R}$ का एक विवृत प्रतिवेश U_x है इस प्रकार कि प्रतिबंध $p|_{U_x}$, $\mathbb{R}$ में एक विवृत समुच्चय पर एक समाकारिता है।

(4) p के अंतर्गत एक परिबद्ध समुच्चय का प्रतिबिम्ब एक परिबद्ध समुच्चय होता है।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

350. प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए मान लीजिए कि $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक फलन है जो $f_n(x) = \frac{e^{-n^2x^2}}{n}$ द्वारा परिभाषित है। निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

(1) $(f_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{R}$ पर 0 पर एकसमान अभिसरित होता है, और $(f_n')_{n\geq 1}$ किसी धनात्मक वास्तविक संख्या M के लिए अंतराल $(-M, M)$ पर 0 पर एकसमान अभिसरित होता है।

(2) $(f_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{R}$ पर 0 पर एकसमान अभिसरित होता है, और $(f_n')_{n\geq 1}$, $\mathbb{R}$ पर 0 पर बिन्दुशः अभिसरित होता है।

(3) $(f_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{R}$ पर 0 पर एकसमान अभिसरित होता है, और $(f_n')_{n\geq 1}$, $\mathbb{R}$ पर 0 पर बिन्दुशः अभिसरित नहीं होता है।

(4) $(f_n)_{n\geq 1}$, $\mathbb{R}$ पर 0 पर बिन्दुशः अभिसरित होता है लेकिन $\mathbb{R}$ पर एकसमान नहीं।

(5) अनुत्तरित प्रश्न

351. सीमा $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$ का मान क्या है?

(1) $\frac{2}{e}$

(2) $\frac{4}{e}$

(3) $\log 2 - 1$

(4) $2\log 2 - 1$

(5) अनुत्तरित प्रश्न

347. Consider the sequence $(s_n)_{n\geq 1}$ and $(t_n)_{n\geq 1}$ defined by $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}$ and $t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n)^k}$. Which of the following statements are true?

(1) $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq \limsup_{n\to\infty} s_n$

(2) $\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e$

(3) $\liminf_{n\to\infty} s_n \geq e^2$

(4) $\liminf_{n\to\infty} t_n \geq e$

(5) Question not attempted

348. Let μ denote the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$. Suppose that f is a non-negative Lebesgue measurable function on $\mathbb{R}$. Let $0=a_{0}

(1) If f is Lebsgue integrable on $\mathbb{R}$, then $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ is finite.

(2) If $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ is finite, then f is Lebesgue integrable on $\mathbb{R}$.

(3) If $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ is finite and $f(x) \geq \alpha$ for all $x \in \mathbb{R}$ then f is Lebesgue integrable on $\mathbb{R}$.

(4) If $\sum_{k\geq 0} a_k \mu(A_k)$ is finite and f is bounded, then f is Lebesgue integrable on $\mathbb{R}$.

(5) Question not attempted

349. Let $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a non-constant polynomial. Which of the following statements are true?

(1) The pre-image of a compact set under p is a compact set.

(2) The pre-image of a connected set under p is a connected set.

(3) Every point $x \in \mathbb{R}$ has an open neighbourhood U_x such that the restriction $p|_{U_x}$ is a homeomorphism onto an open set in $\mathbb{R}$.

(4) The image of a bounded set under p is a bounded set.

(5) Question not attempted

350. For each $n \geq 1$ let $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function defined by $f_n(x) = \frac{e^{-n^2x^2}}{n}$. Which of the following statements are true?

(1) $(f_n)_{n\geq 1}$ converges uniformly to 0 on $\mathbb{R}$, and $(f_n')_{n\geq 1}$ converges uniformly to 0 on the interval $(-M, M)$ for some positive real number M.

(2) $(f_n)_{n\geq 1}$ converges uniformly to 0 on $\mathbb{R}$, and $(f_n')_{n\geq 1}$ converges pointwise to 0 on $\mathbb{R}$.

(3) $(f_n)_{n\geq 1}$ converges uniformly to 0 on $\mathbb{R}$, and $(f_n')_{n\geq 1}$ does not converges pointwise to 0 on $\mathbb{R}$.

(4) $(f_n)_{n\geq 1}$ converges pointwise to 0 on $\mathbb{R}$ but not uniformly on $\mathbb{R}$.

(5) Question not attempted

351. What is the value of the limit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}$?

(1) $\frac{2}{e}$

(2) $\frac{4}{e}$

(3) $\log 2 - 1$

(4) $2\log 2 - 1$

(5) Question not attempted